

基于 Floquet 理论的深水隔水管参激振动稳定性分析

王文明 郝逸 范进朝 李皓冉 朱霄霄 顾继俊

中国石油大学(北京)机械与储运学院, 北京 102249

摘要: 隔水管在工作过程中会受到浮体施加的升沉作用力,该作用力会使得轴向力发生周期性变化,引起参激振动,因此研究隔水管参激振动对避免隔水管发生参激共振具有指导意义。考虑钻井液对隔水管的作用力,通过微元法建立了隔水管横向振动控制方程。假定轴向力周期性变化,利用主坐标分析法得到隔水管 Mathieu 方程,基于 Floquet 理论对隔水管进行参激振动稳定性分析,得到了系统参激稳定图。结果显示,主不稳定区发生在隔水管固有频率二分之一附近。进一步研究阻尼对系统参激不稳定区的影响,发现阻尼使得隔水管参激稳定区域增加,并且随着阻尼增大,稳定区域增大。该研究对隔水管设计过程中避免参激共振具有一定参考意义。

关键词: 隔水管;参激振动;Mathieu 方程;Floquet 方法;参激稳定图

DOI:10.3969/j.issn.1006-5539.2018.06.009

Analysis of the Parametrically Excited Vibration Stability of Risers Based on Floquet Theory

Wang Wenming, Hao Yi, Fan Jinchao, Li Haoran, Zhu Xiaoxiao, Gu Jijun

College of Mechanical Engineering, China University of Petroleum, Beijing, 102249, China

Abstract: The riser will be subject to platform heave forces during operation, which causes the axial force to change periodically, causing parametric vibration. Therefore, it is instructive to study the parametric vibration of the riser to avoid parametric resonance. This paper considers the force of the drilling fluid on the riser and establishes the transverse vibration control equation of riser by using the micro-element method. Assuming that the axial force changes periodically, the Mathieu equation of the riser is obtained. And the parametrically excited vibration stability analysis of the riser is performed based on the Floquet theory. The results showed that the main instability zone occurred near one-half of the natural frequency of the riser. With further study for the influence of damping on the system parameter stability, it is found that the damping increases the stability area of the riser, and the larger the damping, the greater the stable area is. The research of this paper provides reference for avoiding the parametrically excited resonance in the design of the riser.

Keywords: Riser; Parametrically excited vibration; Mathieu equation; Floquet method; Parametrically excited stability diagram

收稿日期:2018-09-04

基金项目:国家自然科学基金项目“深海悬链线管中管的载荷传递特性及接触作用机理研究”(51309237)

作者简介:王文明(1981-),男,河北沧州人,副教授,博士,主要从事海洋管道智能装备技术,深海连续管管柱力学等研究工作。

0 前言

隔水管是海洋钻井设备必不可少的装备,随着国家深海战略的提出,隔水管的工作环境也将更加复杂^[1-2]。在实际作业过程中,隔水管受到水平方向海洋载荷激励发生横向振动,但由于波浪的作用,与隔水管顶部相连的浮体会周期性升沉,导致隔水管轴向力周期性改变,从而引发参激振动,影响隔水管的使用寿命^[3]。

国内外学者对隔水管参激振动问题进行了研究, Park H I 等人基于三维有限元方法研究在参数激励和横向振动耦合作用下的隔水管振动问题,结果表明组合激励的响应幅度远大于横向激励响应幅度^[4]; Lei Song 等人利用伪激励法研究了在海洋载荷作用下的隔水管参激振动频域响应^[5]; 王宴滨等人利用振型叠加法将隔水管参数振动方程转化为 Mathieu 方程,并用摄动法对方程求解,得到隔水管参激振动不稳定区^[6]; 唐友刚等人考虑隔水管顶端动边界条件,研究在剪切流作用下参激-涡激耦合振动响应,结果表明横向振动响应频率存在 0.5 倍参激亚谐成分^[7]; 李威等人基于 DQM 方法得到隔水管参激振动稳定图,研究阻尼和钻井液流速对系统稳定性的影响,结果表明阻尼越大对系统稳定性越好,流速增加会增加系统失稳的风险^[8]; 张杰等人基于 Floquet 理论分析了隔水管参激特性,考虑轴向力线性变化,模态出现耦合响应,结果表明模态耦合参数振动的不稳定区显著增大^[9]。

国外学者对隔水管参激振动研究是假设轴向力不变,并且未考虑内部钻井液的作用,一定程度上简化了模型,但与实际工程有一定偏差。本文研究浮体升沉幅值和周期对隔水管横向振动稳定性的影响,假设轴向力线性变化,考虑钻井液对隔水管的作用力,利用微元法建立隔水管横向振动控制方程,基于 Floquet 理论对隔水管参激问题进行研究,得到参激振动稳定图。选取不同区域的浮体升沉周期 T 和浮体升沉幅值 a , 计算隔水管各阶模态随时间的变化趋势,判断系统是否稳定。在此基础上研究阻尼 c 对系统稳定性的影响,对隔水管设计过程中避免参激共振具有一定参考意义。

1 隔水管力学模型的建立

海洋隔水管系统见图 1, 隔水管两端通过铰链分别连接钻井船和海底井口, 将隔水管简化为两端铰接的梁, 隔水管自身受到重力、浮力、顶部张紧力以及内部钻井液的作用力, 隔水管在海洋载荷作用下会产生横向振动。

使用微元法对隔水管进行受力分析, 建立隔水管横向振动的力学模型, 见图 2。取隔水管微元段 ds , 根据隔

水管的受力分析, 隔水管单位长度受到轴向力为 F_{rs} , 弯矩为 M , 剪力为 F_{rs} , 浮重为 F_w , 海洋载荷为 F_{ws} 和惯性力。

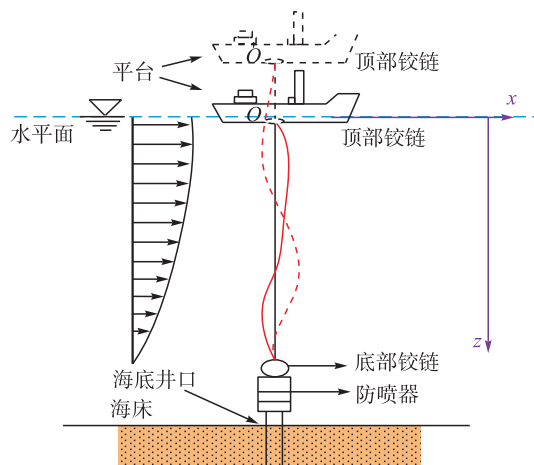


图 1 隔水管系统模型

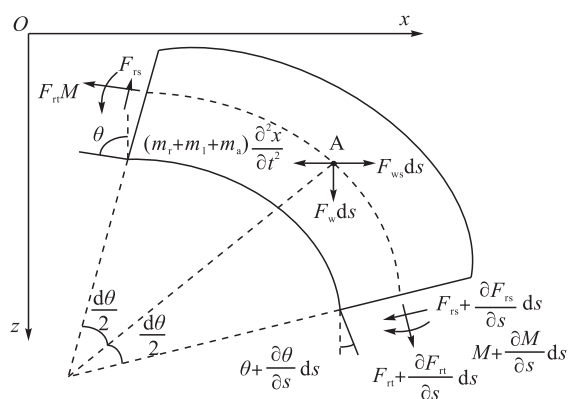


图 2 隔水管微元受力分析

根据隔水管微元段受力分析, 建立隔水管横向振动控制方程:

$$EI \frac{\partial^4 x}{\partial z^4} - \frac{\partial}{\partial z} \left(F_{rs} \frac{\partial x}{\partial z} \right) + (m_r + m_1 + m_a) \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + m_1 v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} + 2m_1 v \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t} = F_{ws} \quad (1)$$

式中: EI 为隔水管的抗弯刚度, $N \cdot m^2$; m_r 、 m_a 和 m_1 分别表示单位长度隔水管的重量、单位长度附加水质量和单位长度钻井液的质量, kg ; v 为内部钻井液的流速, m/s ; $m_1 \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ 、 $m_1 v^2 \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ 和 $2m_1 v \frac{\partial^2 x}{\partial z \partial t}$ 分别表示由于钻井液流动产生的牵连惯性力、相对惯性力和科式惯性力, N 。隔水管上下端均为铰接, 并认为平台始终处于井口正上方, 因此边界条件为:

$$\begin{cases} x|_{z=0} = 0, EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} |_{z=0} = 0 \\ x|_{z=H} = 0, EI \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} |_{z=H} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

2 隔水管参激振动稳定性分析

平台在横向振动的同时还会随着海洋载荷进行周期性的升沉运动,平台周期性升沉运动会使隔水管轴向力发生周期性变化,而轴向力周期性变换可能会引起对隔水管不利的参激共振。轴向力包含两部分:一部分由于重力导致的静态轴力和一部分随平台周期性升沉的时变轴力。要分析时变轴力引起的参激振动,首先要提取出隔水管的固有特性。

2.1 隔水管固有频率提取

选取不同外部激励频率,当立管固有频率和激励频率相近时,就会发生共振,基于这一原理可以间接得到隔水管固有频率。隔水管固有频率求解时,不考虑轴向力中的时变力,因此轴向力^[10]可为: $F_n(z,t) = 1.2HF_w - F_w z$ 。忽略对动力响应影响较小的项^[11],并假设立管的稳态振动形态为 $x(z,t) = \sum_i^n \phi_i(z)e^{i\omega t}$,为求得固有频率,假设对立管在沿管长方向均匀施加外部激励 $F_{ws}(z,t) = f_{ws}e^{i\omega t}$,将外部激励和振动形态带入隔水管横向振动控制方程,将偏微分方程化为常微分方程,见式(3)。式(3)为非线性方程,方程只有数值解,使用差分法求解其数值解^[12],用中心差分代替微分,利用 Matlab 迭代求解。

$$\sum_i^n \left(EI \frac{d^4 \phi_i(z)}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left((1.2HF_w - F_w z) \frac{d\phi_i(z)}{dz} \right) - (m_r + m_1 + m_a) \omega_n^2 \phi_i(z) + m_1 v^2 \frac{d^2 \phi_i(z)}{dz^2} \right) = 0 \quad (3)$$

2.2 Mathieu 方程建立

建立隔水管的 Mathieu 方程需要考虑轴向力中的动态轴力^[13],假设动态轴力为简谐形式,那隔水管的轴向力为:

$$F_n(z,t) = 1.2HF_w - F_w z + k \cdot a \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} \quad (4)$$

式中: T 为浮体升沉周期, s ; a 为浮体升沉幅值, m ; k 为升沉补偿器刚度, N/m , $k = \frac{F_w \cdot H}{a_c}$, a_c 为系数^[14],取 10 m。

假设隔水管的稳态振动表达式如下:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ \dots \\ y_{10}' \\ y_{11}' \\ \dots \\ y_{20}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\bar{\omega}_1^2 + \frac{k}{m} a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) f_{1,1} & \dots & \frac{k}{m} a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) f_{1,10} & -c\bar{\omega}_1 & \dots & 0 \\ \frac{k}{m} a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) f_{2,1} & \dots & \frac{k}{m} a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) f_{2,10} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{k}{m} a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) f_{10,1} & \dots & -\bar{\omega}_{10}^2 + \frac{k}{m} a \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) f_{10,1} & 0 & \dots & -c\bar{\omega}_{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_{10} \\ y_{11} \\ \dots \\ y_{20} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$x(z,t) = \sum_{i=1}^n \phi_i(z) q_i(t), i = 1, 2, 3 \dots n \quad (5)$$

式中: $\phi_i(z)$ 是第 i 阶模态; $q_i(t)$ 是模态坐标函数, m 。

考虑轴向力周期性变化,将隔水管稳态振动表达式 $x(z,t)$ 带入隔水管横向振动方程得:

$$\sum_{i=1}^n \left(EI \frac{d^4 \phi_i(z)}{dz^4} q_i(t) - \frac{d}{dz} \left((1.2HF_w - F_w z + k a \cos \frac{2\pi t}{T}) \frac{d\phi_i(z)}{dz} \right) q_i(t) + (m_r + m_1 + m_a) \frac{d^2 q_i(t)}{dt^2} \phi_i(z) + m_1 v^2 \frac{d^2 \phi_i(z)}{dz^2} q_i(t) \right) = 0 \quad (6)$$

式(6)与式(3)相减,振型函数具有正交性,因此对两端乘以 $\phi_j(z)$ 并积分,并考虑阻尼作用,得到隔水管参数激励方程:

$$q_j''(t) + \bar{\omega}_j^2 q_j(t) - \frac{k}{m} a \cos \frac{2\pi t}{T} \sum_{i=1}^n f_{ij} q_i(t) + c \bar{\omega}_j q_j'(t) = 0 \quad (7)$$

式中: $m = m_r + m_1 + m_a$; $f_{ij} = \frac{\int_0^H \phi_i''(z) * \phi_j(z) dz}{\int_0^H \phi_j(z) * \phi_j(z) dz}$,为模态

耦合系数^[15-16]; c 为阻尼系数; $\bar{\omega}_j$ 为隔水管第 j 阶固有频率, rad/s 。

方程(7)属于 Mathieu 方程,隔水管的固有频率与参数 T 和 a 都在 Mathieu 方程中,采用 Floquet 理论^[17]通过参数平面 $T-a$ 来研究系统稳定性非常方便。即若在 T 与 a 的某一定值之下,系统的参激振动响应无界,系统发生参激共振。在参数平面 $T-a$ 上,对应发生参数共振的点的集合所形成的区域叫做参激共振区。

3 算例及影响因素分析

3.1 基于 Floquet 理论的参激稳定性分析

为了求解式(7),对其进行降阶处理^[14],本文研究

前 10 阶, $i, j \in (1, 10)$, 令: $\begin{cases} y_n = q_n(t) \\ y_{N+n} = q_n'(t) \end{cases}, N = 10, n = 1, 2 \dots N$, 得到:

令 $Y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_{19}, y_{20}]^T$, 式(8)写成 $Y'(t) = A(t)Y(t)$, 其中 $A(t)$ 是一个周期矩阵, 自变量为平台升沉幅值 a 和平台升沉周期 T , 采用 Floquet 理论研究方程稳定性^[18]。

Floquet 理论: 对于式 $Y'(t) = A(t)Y(t)$, 有一个形式为 $Y(t) = P(t)e^{tR}$ 的解, 其中 $P(t)$ 是一个 $2N \cdot 2N$ 的矩阵, 周期为 T , R 也是一个 $2N \cdot 2N$ 的常数矩阵。根据 Floquet 理论, 总存在一个常矩阵 B , 使得 $Y(t+T) = Y(t)B$ 。因此有 $B = e^{TR}$, 通过求解 B 或 R 的特征值便可得出系统的稳定性, 假设矩阵 B 的特征值为 λ_i , 稳定性判定办法见表1。假设初始条件 $Y(0) = I$, 利用经典四阶龙格-库塔方法即可求解^[19]。

表1 系统稳定性判定方法

λ_i	是否稳定
$\max(\lambda_i) > 1$	不稳定
$\max(\lambda_i) = 1$	临界稳定
$\max(\lambda_i) < 1$	稳定

选取隔水管计算参数见表2。

表2 算例参数

名称	数值	名称	数值
隔水管总长 /m	1 000	水深 /m	1 000
隔水管外径 /mm	533	海水密度 /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	1 030
隔水管壁厚 /mm	25.4	钻井液密度 /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	800
隔水管密度 /($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	7 850	截面惯性矩 / mm^4	1.4×10^8
弹性模量 /GPa	206	钻井液流速 /($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	2
顶张力系数	1.2	阻尼 /($\text{N} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}$)	0.2

利用 Floquet 理论求得隔水管参激振动不稳定区, 见图3。

图3中横坐标为浮体升沉周期 T , 纵坐标为浮体升沉幅值 a , 任意周期和幅值代表一组参数激励, 其中黑色区域的参数组合代表为参激不稳定区, 白色区域的参数组合代表为参激稳定区。

根据文献^[13,20], 高阶不稳定区影响较小, 因此主不稳定区(发生在 $T \approx \frac{\pi}{\omega_n}$ 参数共振)通常具有更大意义。根据2.1小节的方法, 求得隔水管系统固有频率和参激共振参数见表3。

表3 隔水管前十阶振动参数

阶数	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$	$n = 8$	$n = 9$	$n = 10$
频率 $\bar{\omega}_n$ / ($\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$)	0.14	0.28	0.42	0.57	0.72	0.88	1.05	1.22	1.39	1.57
周期 / s	45.3	22.41	14.80	10.98	8.67	7.12	6.01	5.17	4.52	4.00
主不稳定区	22.65	11.20	7.40	5.49	4.33	3.56	3.00	2.59	2.26	2.00

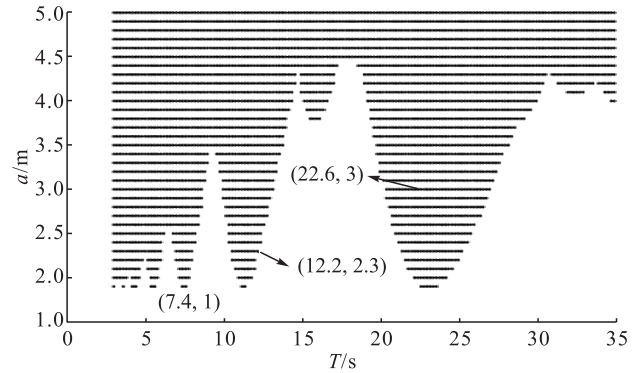


图3 隔水管参激振动不稳定区

选取不稳定区参数 $a = 3, T = 22.6$; 临界稳定区参数 $a = 2.3, T = 12.2$; 稳定区参数 $a = 1, T = 7.4$ 。分别求得各区域前十阶模态时间历程曲线, 见图4。

从图4-a)看出, 选择不稳定区参数组合, 当平台升沉频率是一阶固有频率的2倍时, 一阶模态被激发(虚线), 随着时间的增加, 时间函数一直无限增长, 引发参激共振; 从图4-b)看出, 选择临界稳定区参数组合, 可以看出当给定二阶临界稳定的参数激励, 相应模态被激发(虚线), 并一直维持临界稳定状态。在阻尼的作用下, 其他模态随着时间推移逐渐降低, 但由于模态之间相互耦合, 并不会消失; 从图4-c)看出, 选择稳定区参数组合, 由于阻尼的存在, 随着时间推移, 各阶模态最终消失。

3.2 阻尼对隔水管参激稳定性影响

当不考虑阻尼, 隔水管参激方程变为式(9), 利用同样的方法对方程降阶处理和求解, 得到不考虑阻尼的 $T-a$ 平面, 图5-a)。黑色实线表示无阻尼下临界稳定曲线, 黑色实线以上区域表示不稳定区, 黑色实线下方区域表示稳定区。为了方便比较阻尼对参激振动的影响, 图5-a)中红色虚线为阻尼 $c = 0.2$ 的临界稳定曲线, 可以看出阻尼的存在有效地扩大了隔水管参激稳定区域。

为了分析阻尼大小对稳定区的影响, 选取0.2、0.3、0.4、0.5四种阻尼进行计算, 得到四种阻尼下的临界稳定曲线, 见图5-b), 可以明显地看出随着阻尼的增大隔水管参激稳定区增大。

$$q_j''(t) + \omega_j^2 q_j(t) - \frac{k a \cos \Omega t}{m} \sum_{i=1}^n f_{ij} q_i(t) = 0 \quad (9)$$

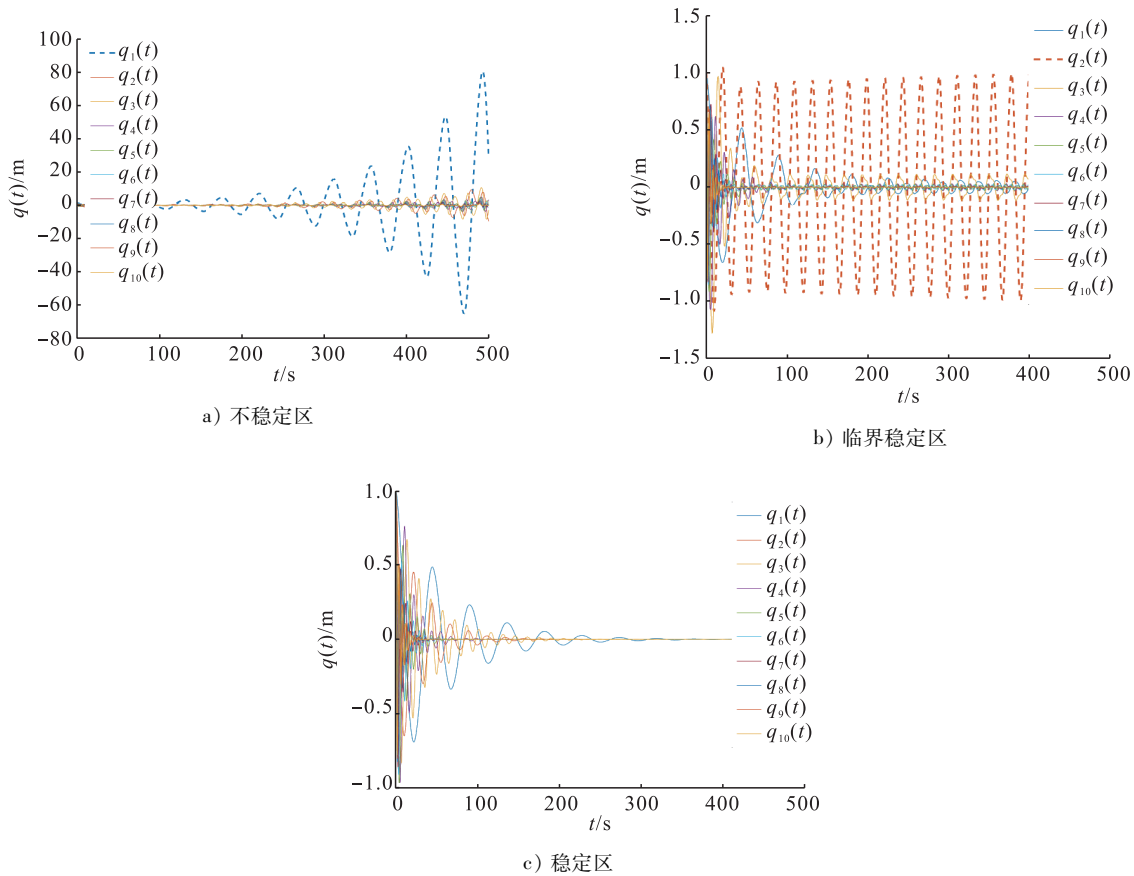


图4 各区域前十阶模态时间历程曲线

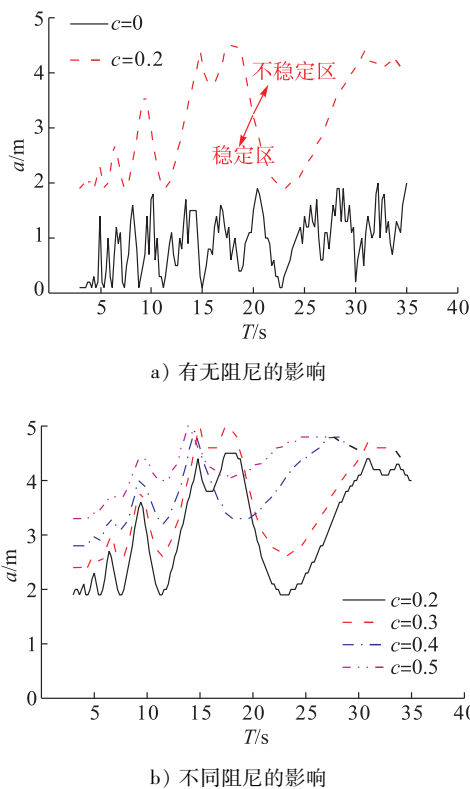


图5 阻尼对隔水管参激振动的影响

4 结论

1) 将隔水管系统简化为两段铰接的梁,采用微元法

建立了隔水管横向振动控制方程,考虑隔水管轴向力周期性变化,利用主坐标变换法得到隔水管系统的 Mathieu 方程。

2) 对 Mathieu 方程进行降阶处理,选取隔水管计算算例,利用 Floquet 理论分析了方程的稳定性,得到了隔水管系统参激稳定图,发现主不稳定区发生在 $T \approx \frac{\pi}{\omega_n}$ 参数共振域附近。

3) 阻尼的存在使得隔水管参激稳定区域增加,并且阻尼越大,稳定区越大,因此在设计隔水管时增加横向振动阻尼,在一定程度上可以有效避免参激共振。

参考文献:

- [1] 王文明,熊明皓,陈钱荣,等. 深海垂直管中管载荷传递模拟分析[J]. 石油矿场机械, 2015, (3): 1-5.
Wang Wenming, Xiong Minghao, Chen Qianrong, et al. Simulation Analysis of Load Transfer in Deep Sea Pipe-in-Pipe Vertical System [J]. Oil Field Equipment, 2015, (3): 1-5.
- [2] Wang W, Chen Y, Li H, et al. Axial Load Transfer Characteristics of SCR Pipe-in-Pipe Vibration System with Different Diameter Ratio [C] // Paper OMAE 2016-54599 was Presented at the ASME 2016 35th International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering, June 19-24, 2016,

- Busan, South Korea. New York: ASME, 2016.
- [3] 冯丽梅. 深海顶张力立管参数激励振动研究[D]. 天津: 天津大学, 2010.
- Feng Limei. The Study on the Parametric Vibration for Top-Tension Riser in Deep-Sea [D]. Tianjin: Tianjin University, 2010.
- [4] Park H I, Jung D H. A Finite Element Method for Dynamic Analysis of Long Slender Marine Structures Under Combined Parametric and Forcing Excitations [J]. Ocean Engineering, 2002, 29 (11): 1313 - 1325.
- [5] Lei Song, Zhang Wenshou, Lin Jiahao, et al. Frequency Domain Response of a Parametrically Excited Riser Under Random Wave Forces [J]. Journal of Sound & Vibration, 2014, 333 (2): 485 - 498.
- [6] 王宴滨, 高德利, 房 军. 深水钻井隔水管在平台升沉运动下的参数激励响应分析[J]. 应用力学学报, 2016, 33(6): 996 - 1001.
- Wang Yanbin, Gao Deli, Fang Jun. Parametrically Excited Vibration Analysis of Deepwater Drilling Riser Deduced by the Heave Motion of Platform [J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2016, 33 (6): 996 - 1001.
- [7] 唐友刚, 邵卫东, 张 杰, 等. 深海顶张力立管参数激励 - 涡激耦合振动响应分析[J]. 工程力学, 2013, 30(5): 282 - 286.
- Tang Yougang, Shao Weidong, Zhang Jie, et al. Dynamic Response Analysis for Coupled Parametric Vibration and Vortex-Induced Vibration of Top-Tensioned Riser in Deep-Sea [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30 (5): 282 - 286.
- [8] 李 威, 张 阳. 基于 DQM 的顶部预张力立管参数激励振动研究[J]. 中国海洋平台, 2016, 31(2): 30 - 38.
- Li Wei, Zhang Yang. Study of Parametric Vibration of Top-Tensioned Riser with Differential Quadrature Method [J]. China Offshore Platform, 2016, 31 (2): 30 - 38.
- [9] 张 杰, 唐友刚, 黄 磊, 等. 参数激励下深海立管多模态耦合振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(19): 51 - 56.
- Zhang Jie, Tang Yougang, Huang Lei, et al. Multi-Mode Coupled Vibration Behavior of a Deep-Water Riser Under Parametric Excitations [J]. Journal of Vibration & Shock, 2013, 32 (19): 51 - 56.
- [10] 鞠少栋, 畅元江, 陈国明, 等. 超深水钻井作业隔水管顶张力确定方法[J]. 海洋工程, 2011, 29(1): 100 - 104.
- Ju Shaodong, Chang Yuanjiang, Chen Guoming, et al. Determination Methods for the Top Tension of Ultradeepwater Drilling Risers [J]. The Ocean Engineering, 2011, 29 (1): 100 - 104.
- [11] 田鹏勇. 隔水管横向振动特性的仿真研究[D]. 秦皇岛: 燕山大学, 2014.
- Tian Pengyong. The Simulation Research of Riser Transverse Vibration Characteristics [D]. Qinhuangdao: Yanshan University, 2014.
- [12] 刘清友, 朱军凯, 毛良杰. 深水钻井工况下隔水管横向振动特性研究[J]. 西南石油大学学报: 自然科学版, 2016, 38(5): 1 - 8.
- Liu Qingyou, Zhu Junkai, Mao Liangjie. Study of Characteristics of Lateral Vibration of the Riser in Deepwater Drilling Condition [J]. Journal of Southwest Petroleum University: Science & Technology Edition, 2016, 38 (5): 1 - 8.
- [13] Park H I, Jung D H. A Finite Element Method for Dynamic Analysis of Long Slender Marine Structures Under Combined Parametric and Forcing Excitations [J]. Ocean Engineering, 2002, 29 (11): 1313 - 1325.
- [14] 邵卫东. 深海顶张力立管参数激励 - 涡激耦合动力响应分析[D]. 天津: 天津大学, 2012.
- Shao Weidong. Dynamic Response Analysis of Coupled Parametric Vibration and Vortex-Induced Vibration for Top-Tension Riser in Deep-sea [D]. Tianjin: Tianjin University, 2012.
- [15] Senjanovic I, Ljuština A M, Parunov J. Natural Vibration Analysis of Tensioned Risers by Segmentation Method [J]. Oil & Gas Science and Technology, 2007, 61 (5): 647 - 659.
- [16] 张 杰. 深海立管参数激励 - 涡激联合振动与疲劳特性研究[D]. 天津: 天津大学, 2014.
- Zhang Jie. Vortex-Induced Vibration and Fatigue Analysis of Deepwater Risers Considering Parametric Excitations [D]. Tianjin: Tianjin University, 2014.
- [17] 季文美. 机械振动[M]. 北京: 科学技术出版社, 1985.
- Ji Wenmei. Mechanical Vibration [M]. Beijing: Science and Technology Press, 1985.
- [18] 杨和振, 李华军. 参数激励下深海立管动力特性研究[J]. 振动与冲击, 2009, 28(9): 65 - 69.
- Yang Hezhen, Li Huajun. Vibration Analysis of Deep-Sea Risers Under Parametric Excitations [J]. Journal of Vibration & Shock, 2009, 28 (9): 65 - 69.
- [19] 文世鹏, 张 明. 应用数值分析[M]. 北京: 石油工业出版社, 2004.
- Wen Shipeng, Zhang Ming. Applied Numerical Analysis [M]. Beijing: Petroleum Industry Press, 2004.
- [20] Chatjigeorgiou I K, Mavrakos S A. Nonlinear Resonances of Parametrically Excited Risers - Numerical and Analytic Investigation for $\Omega = 2\omega_1$ [M]. Oxford: Pergamon Press, Inc., 2005.